引文格式:马杰,王雯,邓辰龙,等.动态观测权调整的GNSS/INS抗差因子图优化算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(6):1098-1109.DOI:10.13203/j.whugis20240493

Citation:MA Jie,WANG Wen,DENG Chenlong,et al.A Robust Factor Graph Optimization Algorithm with Dynamic Observation Weight Adjusting[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(6):1098-1109.DOI:10.13203/j.whugis20240493

动态观测权调整的GNSS/INS抗差因子图优化算法

马 杰[1,2] 王 雯[1] 邓辰龙[1,2] 唐卫明[3] 邱诗瑾[1]

1 武汉理工大学航运学院,湖北 武汉,430063

2 水路交通控制全国重点实验室(武汉理工大学),湖北 武汉,430063

3 武汉大学卫星导航定位技术研究中心,湖北 武汉,430079

摘 要:全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)和惯性导航系统(inertial navigation system,INS)组合导航能够提供连续的定位服务,但在复杂的城市环境中,GNSS信号易受多路径效应和非视距信号干扰,异常观测值频发,显著影响组合导航的定位精度。针对传统因子图优化方法中固定权重难以适应GNSS量测噪声协方差动态变化,以及引入Huber核函数的抗差算法计算开销较大的问题,提出了一种基于动态观测权调整的抗差因子图优化算法。该算法构建了动态权函数,依据滑动窗口内的验后残差自适应调整GNSS观测在目标函数中的残差权重系数,不改变残差值本身,从而保持目标函数的二次形式。利用不同载体自采数据与不同环境下的开源数据进行实验验证,结果表明,相较于基于Huber核函数的抗差算法,所提算法的定位结果均方根误差和标准差分别降低了约12%和26%,计算时间缩短约18%,在提高组合导航定位精度的同时优化了计算效率。此外,基于开源数据分析了不同滑动窗口大小对算法抗差性能的影响,结果表明,当滑动窗口设置为30 s时,抗差效果与计算时间达到较好平衡,且所提算法不改变滑动窗口大小对定位精度与计算耗时的影响趋势。

关键词:GNSS/INS组合导航;因子图优化;滑动窗口;动态权函数;观测权调整

中图分类号:P228 **文献标识码**:A **收稿日期**:2025-03-09

DOI:10.13203/j.whugis20240493 **文章编号**:1671-8860(2026)06-1098-12

A Robust Factor Graph Optimization Algorithm with Dynamic Observation Weight Adjusting

MA Jie[1,2] *WANG Wen*[1] *DENG Chenlong*[1,2] *TANG Weiming*[3] *QIU Shijin*[1]

1 School of Navigation, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China

2 State Key Laboratory of Maritime Technology and Safety (Wuhan University of Technology), Wuhan 430063, China

3 GNSS Research Center, Wuhan University, Wuhan 430079, China

Abstract: **Objectives**: The integration of global navigation satellite system (GNSS) and inertial navigation system (INS) provides continuous positioning services. However, in complex urban environments, GNSS signals are highly susceptible to multipath effects and non-line-of-sight interference, which can severely degrade the positioning accuracy of integrated navigation systems. Traditional factor graph optimization methods with fixed weights struggle to accommodate the dynamic variability of GNSS measurement noise covariance, while robust algorithms employing the Huber kernel function incur significant computational overhead. **Methods**: A dynamic weight function-based robust factor graph optimization algorithm (FGO) is proposed, which dynamically adjusts the residual weight coefficients of GNSS observations in the objective function based on post-fit residuals within a sliding window. The algorithm preserves the quadratic form of

基金项目:海南省科技计划三亚崖州湾科技城联合项目(2021CXLH0025);中央高校基本科研业务费专项资金(2024IVA047)。

第一作者:马杰,博士,教授,研究方向为信息融合感知、船舶智能导航与时空服务。majie@whut.edu.cn

通信作者:邓辰龙,博士,副教授。c.deng@whut.edu.cn

the objective function by avoiding nonlinear transformations of residual values, ensuring computational efficiency and adaptability to varying observation quality. To process open-source data with the proposed robust algorithm, sliding windows of 10 s, 30 s, and 50 s are utilized. The robust performance of the proposed algorithm under different sliding window sizes is analyzed. **Results:** Compared to the inclusion of the Huber kernel function, the inclusion of the dynamic weight function adjustment mechanism improves the average positioning error standard deviation and positioning root mean square error by 26% and 12%, respectively. When the sliding window is set to 30 s, a satisfactory equilibrium between robustness and computation time can be attained. **Conclusions:** Experimental results show that:(1) compared to FGO with the addition of Huber kernel function, the dynamic weight function adjustment can effectively reduce the influence of GNSS outliers, and has higher positioning accuracy and robustness. (2) The proposed robust algorithm does not change the trend of the sliding window size on localization and time consumption.

Key words: GNSS/INS integrated navigation; factor graph optimization; sliding window; dynamic weight function; observation weight adjusting

全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)能实现全天候高精度定位,已广泛应用于社会生活、生产的各个领域[1]。在复杂的城市环境中,GNSS信号存在非视距接受[2]和多路径干扰[3]等问题,导致大量异常观测值的产生,这些异常观测值会严重影响GNSS的定位精度和可靠性[4]。惯性导航系统(inertial navigation system,INS)具有自主性和抗干扰能力强等优点,但其定位误差会随时间累积,无法长期独立进行导航定位[5]。因此,通常对GNSS数据和INS数据进行融合,以提高组合导航系统的定位精度。GNSS/INS组合导航一般分为松组合、紧组合和深组合等,在松组合定位时,仍需利用GNSS初步解算得到的接收机位置。由于异常观测值的影响,该位置可能存在较大误差,即使后续再利用惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)数据进行融合定位,其精度及可靠性的提升幅度仍较为有限[6]。

传统的GNSS/INS组合导航算法常采用扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter,EKF)[7]进行数据融合[8]。当GNSS测量质量较高且误差噪声被合理建模时,基于EKF的GNSS/INS组合导航能够表现出较强的鲁棒性和较高的定位精度[8]。然而,文献[9]的研究结果表明,城市峡谷的GNSS测量是非高斯分布的,基于EKF的传感器信息融合算法无法在城市复杂环境中获得最佳性能。因子图优化(factor graph optimization,FGO)[10]为多传感器信息融合提供了新的路径[11]。FGO是一种基于概率图的贝叶斯推理平滑算法[12],通过最大化后验概率来估计状态,能够在全局范围进行一致性优化[13]。近年来,FGO在导航领域的应用逐渐增多,文献[14]分别实现了基于FGO和EKF的GNSS/INS松组合及紧组合的状态估计,并指出FGO的定位结果比EKF更稳定。文献[15]提出了基于FGO紧-松耦合的多源融合算法模型,相比基于滤波的融合算法在东、北向的平均误差精度分别提升了53.98%和54.74%。文献[16]采用EKF和FGO进行多传感器数据处理,指出采用FGO后东、北向的定位精度分别提升了63%、70%。

然而,传统基于FGO的组合导航算法通常采用固定权重,难以适应复杂城市环境中GNSS观测质量的动态变化[17]。针对该问题,文献[18-19]提出在FGO框架中引入如Huber、Cauchy核等鲁棒核函数,以减小异常观测值对优化结果的影响。但鲁棒核函数将优化问题从纯二次形式变为了非二次形式,增加了优化问题的复杂性,降低计算速度,并且无法完全剔除异常值,会导致优化过程陷入局部最优[20]。文献[21]提出可切换约束法,在图模型中引入切换变量约束异常因子,对每个回环乘以一个在0~1范围内波动的开关变量,以抑制错误回环的修正能力,从而起到抵御粗差影响的效果,但额外增加了计算负担。文献[22]进一步推导提出了动态协方差缩放方法,在保留抗差性能的前提下,将开关变量的解算从优化过程中移出,减轻了算法压力。但在初始条件不佳或数据噪声较大的情况下,会导致优化估计器难以收敛。此外,在FGO中,还常使用滑动窗口技术减少计算复杂度,提高计算效率及实时性。但是在抗差FGO算法中,滑动窗口大小的选择是否会受抗差算法的影响还有待进一步分析。

本文基于FGO框架,提出了一种动态观测权调整的抗差FGO算法。该算法借鉴抗差估计

理论,通过引入动态权函数对滑动窗口内各节点的权重进行自适应调整,从而有效抑制异常观测值对优化过程的影响,提升定位结果的精度与可靠性。同时,本文算法保持了优化问题的纯二次形式,避免了显著增加计算时间。此外,本文还分析了不同滑动窗口大小对算法抗差性能及计算时间的影响。

1 基于因子图的组合导航

1.1 滑动窗口的FGO

因子图是一种二分图模型,它将系统中的联合概率分布分解为因子节点与变量节点之间的局部关系[23]。根据最大后验估计原则,目标函数的计算式为:

$$\boldsymbol{X}^{*}=\arg\min_{\boldsymbol{X}}\sum_{i}\left\|r_i(\boldsymbol{X}_i)\right\|_{D_i}^{2} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{X}^{*}$为最优参数解;arg min为目标函数取得最小值时对应的参数取值;i为观测项索引;$\boldsymbol{X}_i$为变量节点;$\boldsymbol{D}$为协方差矩阵;r为残差;$\|\ \|_{D}^{2}$为马氏距离的平方。

对于非线性系统的最小二乘问题,通过高斯-牛顿迭代法进行线性化,式(1)可转变为:

$$\Delta\boldsymbol{X}^{*}=\arg\min_{\Delta X}\sum\left\|J_i(\tilde{\boldsymbol{X}}_i)\Delta\boldsymbol{X}_i+r_i(\tilde{\boldsymbol{X}}_i)\right\|_{D_i}^{2} \tag{2}$$

式中,$\Delta\boldsymbol{X}^{*}$为最优参数解增量;$J_i(\tilde{\boldsymbol{X}}_i)$为残差函数对目前状态在初始值$\tilde{\boldsymbol{X}}_i$处求偏导得到的雅可比矩阵;$\Delta\boldsymbol{X}_i$为状态增量;$r_i(\tilde{\boldsymbol{X}}_i)$是状态为$\tilde{\boldsymbol{X}}_i$时的测量残差。对式(2)右边累加部分展开再合并同类项,因为极小值出现在偏导数为0时,可以将其进一步转换为$\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$形式,其中$\boldsymbol{H}$矩阵为对应的Hessian矩阵,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{J}$。在当前状态$\tilde{\boldsymbol{X}}_i$基础上迭代计算得到状态增量,即可解出FGO问题的最优解。

在实际导航中,因子图因接收新测量值不断增大,直接运算整个因子图会显著增加计算量。为此,通常采用滑动窗口技术[24],通过限制参与优化的历史数据量来降低计算复杂度,GNSS/INS滑动窗口因子图结构如图1所示。

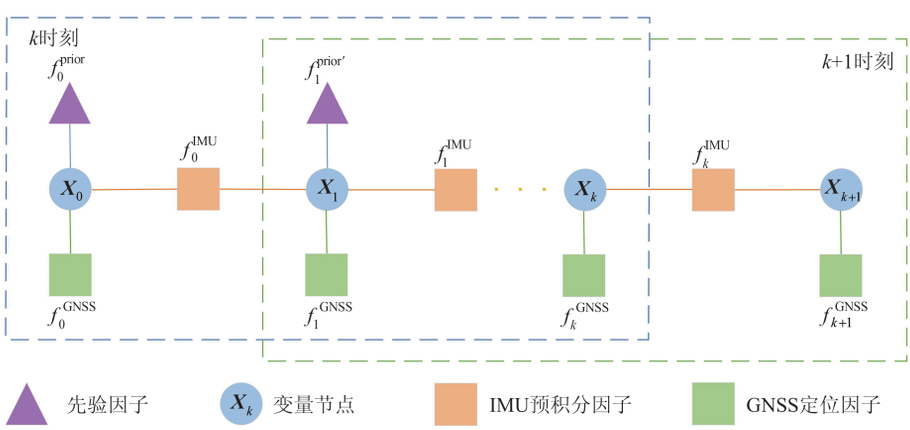


图1 GNSS/INS滑动窗口因子图结构示意图

Fig. 1 Diagram of GNSS/INS Sliding Window Factor Graph

假设滑动窗口大小为n,滑动窗口内待优化的状态参数$X=\{\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-1}\}$,各节点的具体状态变量为:

$$\boldsymbol{X}_k=\begin{bmatrix}p_k^n & v_k^n & q_k^n & b_{g,k} & b_{a,k}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{X}_k$为t_k时刻的状态参数;p_k^n、v_k^n、q_k^n分别为t_k时刻在导航系下的三维位置、速度和姿态;$b_{g,k}$、$b_{a,k}$为t_k时刻三轴陀螺仪零偏、三轴加速度计零偏。加入比例因子误差作为优化状态会进一步扩大状态维度,增加计算负担,所以一般不考虑该误差[25]。

一般情况下,IMU的输出频率通常高于GNSS的输出频率和组合导航系统的实际需求,即对组合导航系统而言,INS测量数据存在冗余信息[26]。因此,在建立IMU因子图节点时,可采用等效因子的更新策略,根据组合导航系统的实际输出频率,采用预积分法确定等效因子的更新周期,将需要输出的导航状态添加为变量节点,处理相邻两个变量节点对应时间的IMU测量值。IMU预积分因子的残差函数r_{IMU}的计算式为:

$$r_{\mathrm{IMU}}(\hat{\boldsymbol{Z}}_{b_{k+1}}^{b_k},\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\delta p_{k,k+1} & \delta v_{k,k+1} & \delta\phi_{k,k+1} & \delta b_{g_{k,k+1}} & \delta b_{a_{k,k+1}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{Z}}_{b_{k+1}}^{b_k}$为IMU预积分观测量,表示在$t_k$到$t_{k+1}$

时间段内,由IMU积分得到的相对位移、速度及姿态增量等观测信息;X为系统优化状态变量集合,包括位姿、速度、陀螺仪零偏、加速度计零偏等待估计量;$\delta p_{k,k+1}$、$\delta v_{k,k+1}$、$\delta \phi_{k,k+1}$分别为时间区间$[t_k, t_{k+1}]$内通过INS数据计算的位置增量残差、速度增量残差和姿态变化增量残差;$\delta b_{g_{k,k+1}}$、$\delta b_{a_{k,k+1}}$分别为该时间内的三轴陀螺仪零偏、三轴加速度计零偏。

GNSS提供接收机的绝对位置信息,GNSS位置因子残差r_{GNSS}的计算式为:

$$r_{\mathrm{GNSS}}(\hat{\boldsymbol{Z}}_k^{\mathrm{GNSS}}, X) = h^{\mathrm{GNSS}}(\boldsymbol{X}_k) - \boldsymbol{Z}_k^{\mathrm{GNSS}} \tag{5}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{Z}}_k^{\mathrm{GNSS}}$为第$k$时刻GNSS观测量,通常为位置观测信息;$X_k$为第$k$时刻的状态变量;$h^{\mathrm{GNSS}}(\boldsymbol{X}_k)$、$\boldsymbol{Z}_k^{\mathrm{GNSS}}$分别为GNSS对$t_k$时刻导航状态函数的计算值、测量值。

此时,GNSS/INS组合导航系统状态估计的目标函数为[27]:

$$\boldsymbol{X}^* = \arg\min\left\{F_{\mathrm{prior}} + F_{\mathrm{IMU}} + F_{\mathrm{GNSS}}\right\} \tag{6}$$

式中,$F_{\mathrm{prior}} = \left\| \boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{H}_p X \right\|^2$为先验项代价函数,$\boldsymbol{r}_p$为先验残差向量,$\boldsymbol{H}_p$为先验信息矩阵;$F_{\mathrm{IMU}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| r_{\mathrm{IMU}}(\hat{\boldsymbol{Z}}_{b_{k+1}}^{b_k}, X) \right\|_{D_k^{\mathrm{IMU}}}^2$为IMU预积分项代价函数;$F_{\mathrm{GNSS}} = \sum_{k=0}^{m} \left\| r_{\mathrm{GNSS}}(\hat{\boldsymbol{Z}}_k^{\mathrm{GNSS}}, X) \right\|_{D_k^{\mathrm{GNSS}}}^2$为GNSS观测项代价函数。

1.2　基于Huber核函数的抗差FGO

传统最小二乘法通过最小化二范数来拟合模型和估计参数,由于残差的平方形式会显著放大异常偏差的影响,该方法对异常值极为敏感。在实际问题中,数据中常存在异常值,如果直接使用最小二乘法,这些异常值会导致估计结果偏离真实值,甚至完全失效。

在因子图中,优化问题通常通过最小化残差的加权来估计变量节点的最优值,而传统二范数加权容易受到异常值的显著影响,导致优化结果偏离真实值。为了解决这一问题,在因子图的优化框架中引入核函数,以增强算法的鲁棒性[28]。经典的鲁棒核函数包括Huber核函数、Cauchy核函数以及Tukey核函数等[29]。

Huber核函数是一种常用的鲁棒核函数,用于减少粗差对目标函数的影响。其通常设计为连续可导,以便在高斯-牛顿等优化算法中保持目标函数的平滑性,计算式为[30]:

$$\rho(s) = \begin{cases} s, s \leqslant \delta^2 \\ 2\delta\sqrt{s} - \delta^2, s > \delta^2 \end{cases} \tag{7}$$

式中,$\rho(\ )$为Huber核函数;$s = \left\| r_i(\boldsymbol{X}_i) \right\|_{D_i}^2$为残差的马氏距离平方;$\delta$为核函数的阈值,通常需要根据经验或通过交叉验证来设定。

加入Huber核函数对残差函数修正后,式(1)中的目标函数变为:

$$\boldsymbol{X}^* = \arg\min_X \sum_i \rho\left(\left\| r_i(\boldsymbol{X}_i) \right\|_{D_i}^2 \right) \tag{8}$$

式中,$r_i(\boldsymbol{X}_k)$为第i个因子的残差函数;$\boldsymbol{D}_i$为测量噪声的协方差矩阵。

结合式(7)、式(8)并对比式(1)可知,在残差较小时,Huber核函数等价于标准的二范数残差,即传统的最小二乘估计。此时,优化保持高斯假设,计算效率高且对误差敏感。当残差较大时,Huber核函数呈线性增长,增长速度低于二范数,从而降低优化算法对异常值的敏感性。然而,Huber核函数对极端粗差的抑制能力有限,因其在大残差区域仅采用线性形式,无法完全剔除极端粗差。

2　动态观测权调整抗差FGO

现有研究多集中于传统FGO方法,在GNSS/INS组合导航中通常对观测数据赋予固定权重。然而,在复杂的城市环境中,GNSS观测易受非视距和多路径效应干扰,频繁出现异常观测值,使得固定权重难以准确描述动态变化的量测噪声协方差。这种缺乏灵活性的处理方式降低了FGO的鲁棒性及最终定位精度。近年来提出的抗差FGO算法通过引入Huber核函数修正残差函数,有效抑制了部分粗差的影响,但在处理大残差时,需多次调整残差贡献权重以逐步收敛,导致计算时间显著增加,限制了其实用性。

为了解决上述问题,本文提出了一种动态权调整且计算复杂度较低的抗差FGO算法。该算法基于文献[31]提出的迭代权抗差估计方法(简称IGG Ⅲ方案)设计动态权函数,通过优化后的状态更新GNSS观测因子的权重,间接调整GNSS位置残差因子的雅可比矩阵。在这一过程中,目标函数保持二次形式,从而避免了因多次非线性调整引起的计算复杂度增加。相比基于Huber核函数的抗差FGO算法,本文算法在抑制粗差的同时,显著降低了计算时间,提升了导航解算效率。

2.1 动态权函数

为降低信息融合时含粗差的GNSS测量值对导航状态估计的影响,可采用IGG Ⅲ方案设计动态权函数$w_i(\boldsymbol{R}_{vi})$,其计算式为:()

$$w_i(\boldsymbol{R}_{vi})=\begin{cases}1, |\bar{\boldsymbol{S}}_{vi}|<k_0\\ \dfrac{1}{|\bar{\boldsymbol{S}}_{vi}|}\left(\dfrac{k_1-|\bar{\boldsymbol{S}}_{vi}|}{k_1-k_0}\right)^2, k_0\leqslant|\bar{\boldsymbol{S}}_{vi}|<k_1\\ 0, |\bar{\boldsymbol{S}}_{vi}|\geqslant k_1\end{cases} \tag{9}$$

式中,$w_i(\boldsymbol{R}_{vi})$为动态权函数;i表示观测时刻,范围为前后两个窗口的$n-1$个重叠时刻;$\bar{\boldsymbol{S}}_{vi}=\boldsymbol{R}_{vi}/\sigma_0$,表示标准化残差,其中$\boldsymbol{R}_{vi}$为第$i$时刻的位置估值与GNSS观测位置的差值;$k_0$、$k_1$是标准化残差的阈值,按照经验通常$k_0$可以取1.0~1.5,$k_1$可以取2.5~3.0。$\sigma_0$为单位权中误差,计算式如下:

$$\sigma_0=\sqrt{\frac{\sum \boldsymbol{R}_{vi}^{\mathrm{T}}p\boldsymbol{R}_{vi}}{n-1}} \tag{10}$$

式中,p为标准因子图对GNSS观测赋予的固定权重。

上述动态权函数充分利用了最小二乘估计的最优线性无偏性和一次范数最小估计的抗差性。当误差小时采用最小二乘估计,以保证估值具有较好的效率;当误差较大但尚未超出一定限度时,采用一次范数最小估计以降低这些观测值对估值的影响;当误差超出一定范围时,权值赋值为零,以彻底消除该观测值的影响。

2.2 GNSS观测权调整

对于图1的滑动窗口,当出现新的观测节点信息后,将第一个变量节点以及与其相关联的因子节点通过边缘化移除。同时,将新的节点$\boldsymbol{X}_{k+1}$加入到窗口中,窗口内除了新节点以外,其他节点的状态都已经在上一个窗口内优化过,所以可以用这些优化过的节点状态对GNSS测量进行重新定权。用重新定权的GNSS量测参与新节点的优化,以t_{k+1}时刻为例,此时滑动窗口内GNSS观测权调整示意图如图2所示。

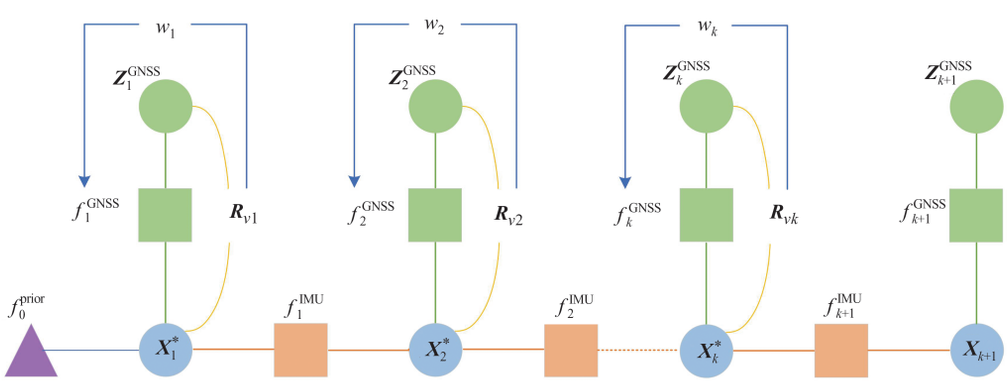


图2 滑动窗口内利用动态权函数实现GNSS观测权调整的示意图

Fig. 2 Diagram of GNSS Observation Weight Adjustment Using Dynamic Weight Function in Sliding Window

滑动窗口内的全局雅可比矩阵表示如下:

$$\bar{\boldsymbol{J}}(\tilde{\boldsymbol{X}})=\left[\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{prior}}\quad\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{IMU}}\quad\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{GNSS}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{J}}(\tilde{\boldsymbol{X}})$为滑动窗口内线性状态$\tilde{\boldsymbol{X}}$的整体雅可比矩阵;$\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{prior}}$为状态先验信息的雅可比矩阵;$\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{IMU}}$为IMU预积分后状态的雅可比矩阵;$\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{GNSS}}$为GNSS观测的雅可比矩阵。调整观测权后,GNSS观测的雅可比矩阵为:

$$\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{GNSS}}=\begin{bmatrix}w_1^2\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{GNSS}} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & w_2^2\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{GNSS}} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & w_k^2\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{GNSS}} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{J}_n^{\mathrm{GNSS}}\end{bmatrix} \tag{12}$$

式中,$\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{GNSS}}$为第$i$个历元传统FGO算法GNSS观测的雅可比矩阵。通过这个方法实现优化下一个节点时,利用已经优化的状态节点去调整GNSS测量在优化问题中的权重,从而有效降低异常观测值对优化结果的影响,甚至实现对异常值的完全剔除。

2.3 算法流程

本文在传统FGO算法的基础上,引入了动态权函数,通过滑动窗口内状态的更新,利用前后两个窗口中重叠部分每时刻GNSS观测位置与对应位置状态估值的残差,动态调整对应时刻GNSS观测值的权重。该动态权函数能够实时反映GNSS测量信息的可信度:当GNSS观测值不可信时,动态权函数会降低其在优化问题中的权重;当GNSS

观测值可信时,权重保持不变。通过上述权重调整机制,可以有效减小异常观测值的影响,准确整合GNSS观测数据,提升FGO算法的鲁棒性与最终导航精度,所提优化算法的流程如图3所示。

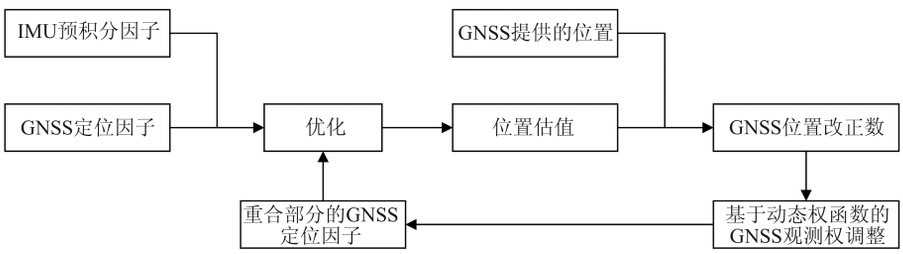


图3　动态观测权调整的抗差FGO流程

Fig. 3　Robust Factor Graph Optimization Process Based on Dynamic Weight Function

在对GNSS和IMU的新观测值进行优化之前,通过滑动窗口对前$n-1$个GNSS观测值进行动态权重调整。调整后的GNSS观测部分目标函数可表示为:

$$F_{\mathrm{GNSS}}=\sum_{k=1}^{n-1}\left\| w_k(\boldsymbol{R}_{vk})\, r_{\mathrm{GNSS}}\left(\boldsymbol{Z}_k^{\mathrm{GNSS}},X\right)\right\|^2_{D_k^{\mathrm{GNSS}}}+\left\| r_{\mathrm{GNSS}}\left(\hat{\boldsymbol{Z}}_n^{\mathrm{GNSS}},X_n\right)\right\|^2_{D_n^{\mathrm{GNSS}}} \tag{13}$$

式中,$\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{GNSS}}$为GNSS的协方差矩阵。滑动窗口的动态权重调整保证了GNSS观测权重能够适应观测数据的质量变化,从而增强系统对异常观测值的鲁棒性,同时保持了优化问题的二次形式,确保了算法的计算效率。

3　抗差FGO算法性能验证

为验证在GNSS存在粗差情况下动态观测权调整的抗差FGO算法(简称本文算法)的性能,并与传统FGO算法(简称传统算法)、基于经典核函数的抗差FGO算法(简称抗差算法)的性能差异进行对比分析,分别选用自采数据和开源数据,以GNSS标准单点定位(standard point positioning, SPP)与IMU的松组合为例进行处理分析,评估不同组合导航算法在不同数据特性条件下抑制GNSS粗差干扰的有效性。

自采数据分别以无人机及车辆为平台,在中国湖北省武汉市实际采集两组GNSS和INS原始观测数据进行处理,验证算法在不同载体场景条件下的导航适用性及可靠性;开源数据则采用武汉大学GREAT团队公开的GNSS/INS数据集[32],测试算法在不同遮挡环境条件下的适用性与鲁棒性。数据处理以武汉大学i2Nav团队开源的OB_GINS软件[33]为基础进行算法改进,滑动窗口大小先按经验设置为30个GNSS观测历元[14]。计算机平台采用Ubuntu 18.04系统,处理器为英特尔13代i5-13500H,内存为14 GB。

为进一步分析滑动窗口大小对本文算法性能的影响,分别设置不同的滑动窗口大小,并利用上述开源数据进行数据处理,其他条件均保持不变,以分析本文算法在不同大小滑动窗口条件下的抗差性能及计算耗时。

3.1　自采数据验证

采用配备上海司南K708板卡的GNSS接收机以及Analog Devices公司生产的ADIS16470微电机系统(micro electro mechanical system, MEMS)惯性传感器,同时安装在无人机和车辆上,并分别于2021年6月23日和7月14日开展GNSS和INS数据的采集工作,上述设备的性能指标如表1所示。

表1　GNSS及MEMS IMU设备性能指标

Table 1　Performance Index of GNSS and MEMS IMU

设备	参数	精度	采样率/Hz
GNSS	SPP	3 m	1
MEMS IMU	三轴陀螺零偏	8°/h	100
	三轴加速度计零偏	13 μg	

就具体实验场景而言,无人机在约50 m高度处沿近似圆形轨迹飞行,由于电池容量限制,实验时长约15 min,展示在低空动态环境下的组合定位性能;车辆则围绕郊区某池塘转圈行驶,实验时长约20 min,展示在地面动态环境GNSS信号受遮挡情况下的组合定位性能。数据采集完成后,选用开源GNSS定位软件RTKLIB[32]进行SPP解算,生成1 Hz的单点定位结果作为组合导航处理的输入数据。同时,选用时间同步后的100 Hz陀螺仪角速度增量和加速度计线加速度增量数据,作为IMU预积分的输入数据。

将无人机和车辆经过预处理后的GNSS和IMU数据分别利用传统算法、抗差算法和本文算

法进行定位解算,得到对应的定位结果。利用邻近的静态基准站,通过武汉迈普时空的GINS RTK/INS软件获取厘米级的北斗/GPS RTK/INS紧组合解算结果,作为实验中无人机和车辆的参考位置,以获取上述3种不同定位算法在北向、东向和天向的定位误差,分别如图4和图5所示。

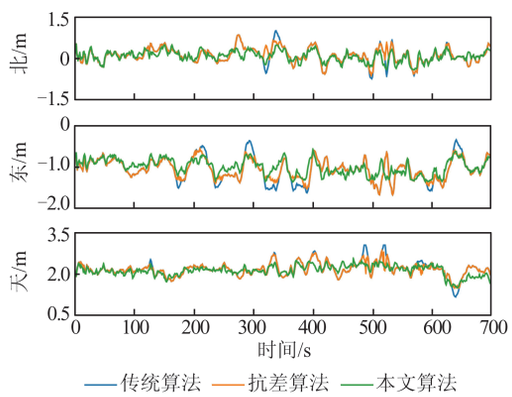


图4 无人机场景下不同算法的定位误差对比

Fig. 4 Positioning Errors Comparison of Different Algorithms in Drone Scenarios

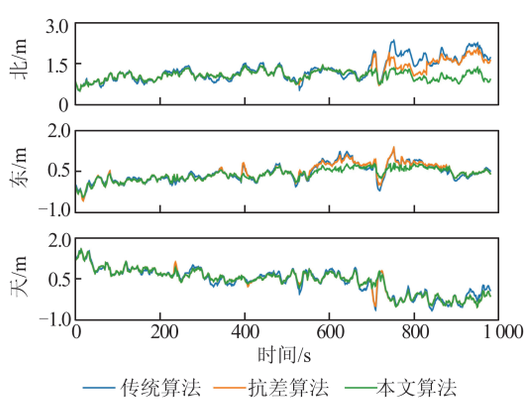


图5 车辆场景下不同算法的定位误差对比

Fig. 5 Positioning Errors Comparison of Different Algorithms in Vehicle Scenarios

由图4可以看出,在无人机场景中,传统算法的误差波动显著,抗差算法在一定程度上降低了误差幅度,但波动仍较明显;相比之下,本文算法通过动态调整GNSS观测权重,有效减小了误差波动,定位精度显著提升。由图5可以看出,在车辆场景中,在700 s附近,由于树木遮挡导致GNSS信号质量下降,传统算法无法降低粗差的影响,定位误差显著增大,尤其是在北方向。抗差算法定位精度稍有提升,但幅度有限。相比而言,本文算法则在北向、东向及天向均有效抑制了粗差的干扰,保证了各方向定位结果的稳定性。

为进一步对比不同算法的精度和计算效率,统计了各算法在北、东、天3个方向上的定位误差标准差(standard deviation, STD)、定位结果均方根误差(root mean square error, RMSE)、时间消耗及本文算法相对抗差算法的提升比例,结果如表2所示。由表2可知,对于无人机场景,本文算法显著缩小了北、东、天3个方向的STD,相较抗差算法,在3个方向的定位误差STD分别降低了20%、18%和15%;同时,本文算法在3个方向上的RMSE也有一定幅度降低,且北向效果显著,降低了27%。对于车辆场景,本文算法在北向和东向定位误差STD分别降低了41%和24%,RMSE也分别降低了13%和16%,天向误差由于通常较难通过GNSS修正来改善,所以其提升比例有限。在计算效率方面,与传统算法相比,无论是抗差算法还是本文算法,其计算时间均有所增加。这主要是因为引入抗差机制后,优化过程的复杂度提升。然而,由于本文算法优化了权重调整策略,实验中的计算时间较抗差算法平均减少了17%,在保持抗差性能的同时有效降低了计算复杂度。

表2 自采数据不同算法定位精度及时间消耗

Table 2 STD, RMSE and Time Consumption of Different Algorithms for Self-Collected Data

实验载体	方法	STD/m			RMSE/m			计算时间/s
		北	东	天	北	东	天	
无人机	传统算法	0.276	0.284	0.266	0.31	1.10	2.22	65.3
	抗差算法	0.251	0.231	0.247	0.30	1.08	2.20	92.4
	本文算法	0.201	0.190	0.211	0.22	1.02	2.15	77.5
	本文算法相较抗差算法提升比例/%	20	18	15	27	6	2	16
车辆	传统算法	0.398	0.318	0.466	1.35	0.56	0.65	97.0
	抗差算法	0.298	0.301	0.462	1.27	0.56	0.64	137.8
	本文算法	0.175	0.228	0.453	1.11	0.47	0.64	113.1
	本文算法相较抗差算法提升比例/%	41	24	2	13	16	0	18

在两个不同载体的自采数据实验中,本文算法均展现出了较强的抗差能力。对于GNSS观测环境较为开阔的无人机场景,即使与低成本MEMS进行组合,本文算法的误差STD也能下降15%以上,北方向RMSE亦有27%的降幅;而对于GNSS环境遮挡较为严重的车载场景,本文算法的定位误差STD能在北向得到41%的降低,北向和东向的RMSE也有约15%的下降。

3.2　开源数据验证

开源数据集包含8个序列,涵盖校园、城市峡谷、远郊等多种复杂场景,且所有传感器观测数据均已实现精确时空同步。本文实验选用其中的campus-01和campus-night两组场景数据,前者采集时间从2020-10-27T02:09:00左右开始,持续约10 min,代表GNSS观测部分遮挡环境;后者采集时间从2020-10-29T10:09:00左右开始,持续约9 min,代表GNSS严重遮挡环境。两组数据均包含1组GNSS文件和2组IMU文件,分别为Septentrio PolaRx5接收机采集得到的RINEX 3.02版本观测值文件以及MEMS ADIS-16470和战术级惯导StarNeto XW-GI7660采集得到的基于右前上载体坐标系的陀螺角速度和加速度计加速度文件。同时,数据集还提供1组参考真值,由Inertial Explorer 8.9软件通过多系统GNSS RTK/战术级惯导紧耦合双向平滑解算获得。其中GNSS、MEMS IMU的性能指标同表1,StarNeto XW-GI7660的性能指标如表3所示。

表3　开源数据的设备参数

Table 3　Device Parameters of Open Source Data

设备	参数	精度	采样率/Hz
StarNeto XW-GI7660	三轴陀螺零偏	≤0.5°/h	200
	三轴加速度计零偏	≤100 μg	

实验首先利用RTKLIB计算GNSS文件数据以得到1 Hz的SPP解,然后将IMU数据除以采样间隔转变为其增量形式并转换到前右下坐标系。为了更好地验证3种算法的定位性能,组合定位时IMU文件在campus-01场景中选用MEMS ADIS-16470数据,在campus-night场景中选用StarNeto XW-GI7660数据。

图6和图7分别展示了campus-01和campus-night场景的北向、东向及天向定位误差。可以看到,传统算法和抗差算法在GNSS观测存在粗差的情况下,其定位误差波动范围均较大,而本文算法显著抑制了误差的波动范围,提升了结果的稳定性。

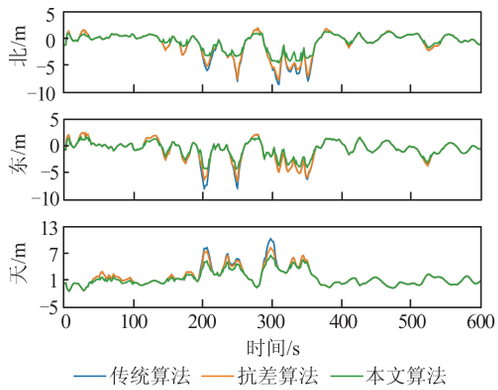


图6　campus-01不同算法的定位误差对比

Fig. 6　Positioning Errors Comparison of Different Algorithms for campus-01

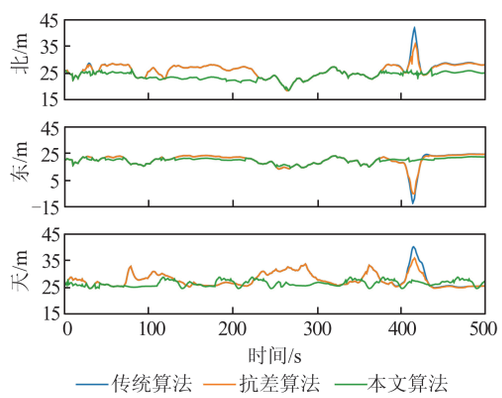


图7　campus-night不同算法的定位误差对比

Fig. 7　Positioning Errors Comparison of Different Algorithms for campus-night

表4统计了不同算法在各方向上的定位误差STD、RMSE及时间消耗。在campus-01场景中,相较于抗差算法,本文算法在北、东、天3个方向的定位误差STD分别降低了28%、25%和17%,RMSE分别减少了29%、24%和16%,表明其在低精度IMU条件下能够有效抑制遮挡环境中GNSS异常观测值的影响,显著提升了组合导航的解算精度。在campus-night场景中,相较于抗差算法,本文算法在北、东、天3个方向的定位误差STD分别降低了35%、37%和47%,改善比例尤为显著,特别是天向误差,这得益于高精度IMU的支持,RMSE也略有改善,但幅度较小。此外,campus-night场景中GNSS信号受干扰比较严重,观测数据中存在大量粗差,即使抗差算法和本文算法已经降低了部分不可靠观测值的权重,仍无法较好削弱粗差的影响,导致观测值残差较大,最终的定位结果与真实位置出现了较大偏离。同时,

表4 开源数据不同算法定位精度及时间消耗

Table 4 STD, RMSE and Time Consumption of Different Algorithms for Open-Source Data

数据源	方法	STD/m			RMSE/m			计算时间/s
		北	东	天	北	东	天	
campus-01	传统算法	2.15	1.89	2.13	2.32	2.02	2.81	55.0
	抗差算法	1.99	1.75	1.91	2.15	1.88	2.59	83.7
	本文算法	1.43	1.32	1.58	1.53	1.42	2.18	68.5
	本文算法相较抗差算法提升比例/%	28	25	17	29	24	16	18
campus-night	传统算法	2.73	4.62	2.77	26.27	20.47	28.27	38.9
	抗差算法	2.21	3.20	2.05	26.10	20.40	28.07	53.6
	本文算法	1.44	2.00	1.08	24.11	19.96	26.70	43.7
	本文算法相较抗差算法提升比例/%	35	37	47	8	2	5	18

在时间消耗方面,相比于抗差算法,本文算法亦表现出更高的计算效率,在campus-01及campus-night场景的时间消耗均缩短了18%。

在两个不同场景的开源数据实验中,本文算法均展现出了较强的鲁棒性和适应性。campus-01实验验证本文算法在GNSS部分遮挡环境下与低成本IMU组合的抗差能力,而campus-night实验则进一步证明了本文算法在GNSS严重遮挡环境下与高精度IMU组合后的性能极限,通过与战术级惯导的协同作用,显著提升了定位误差的精度。

3.3 滑动窗口大小影响分析

考虑到滑动窗口的大小会影响FGO的抗差效果和计算效率,为进一步分析本文算法在不同窗口大小条件下的性能,分别设置10 s、30 s、50 s 3种不同的滑动窗口大小,利用上文的开源数据集测试本文算法的抗差性能和计算时间。

图8和图9分别展示了不同滑动窗口大小条件下,基于campus-01和campus-night数据集的北、东和天3个方向位置误差变化情况。其中,蓝色、橙色和绿色曲线分别表示10 s、30 s和50 s窗口大小时的定位误差。由图8、图9可以看出,随着滑动窗口大小的增加,误差波动幅度逐渐减小。当窗口大小设置为10 s时,两个数据集的定位误差均出现了显著的跳跃,说明即使采用本文算法,滑动窗口的大小也不宜降至10 s。同时可以看出,滑动窗口为30 s时的定位误差与50 s时的定位误差差别不明显,而进一步考虑到滑动窗口越长,计算量越大,故推荐采用30 s的滑动窗口。

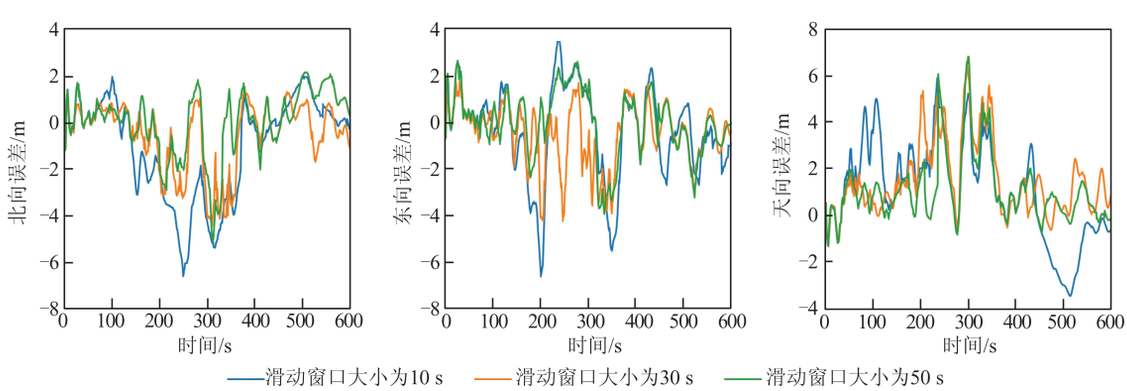


图8 不同滑动窗口大小下campus-01的定位误差对比

Fig. 8 Comparison of Positioning Errors for campus-01 with Different Sliding Window Sizes

表5进一步展示了滑动窗口大小分别为10 s、30 s和50 s时,campus-01和campus-night数据集在北、东和天3个方向的误差STD和RMSE。可以看出,无论是哪组数据集,10 s滑动窗口大小时的定位误差STD及RMES均与30 s、50 s时存在较大差异,后两者之间差异不明显。图10则展示了三维位置RMSE和计算时间,可以看出,随着滑动窗口大小的增加,数据处理所消耗的时间出现了明显的增长,三维位置RMSE有所减小。

综上可知,对于本文算法,当滑动窗口大小不超过30 s时,窗口的增大可有效降低定位误差,但窗口增加至50 s时的精度相比30 s时提升的幅度十分有限。同时,随着滑动窗口的增大,数据处理所需时间显著增加,本文算法仍然推荐采用

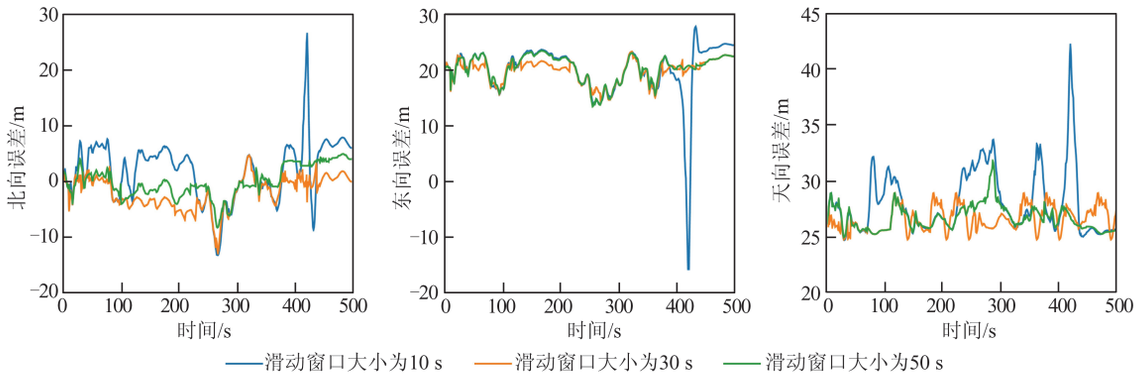


图 9　不同滑动窗口大小下 campus-night 的定位误差对比

Fig. 9　Comparison of Positioning Errors for campus-night with Different Sliding Window Sizes

表 5　不同滑动窗口大小下的定位误差 STD 和 RMSE

Table 5　Positioning Error STD and RMSE for Different Sliding Window Sizes

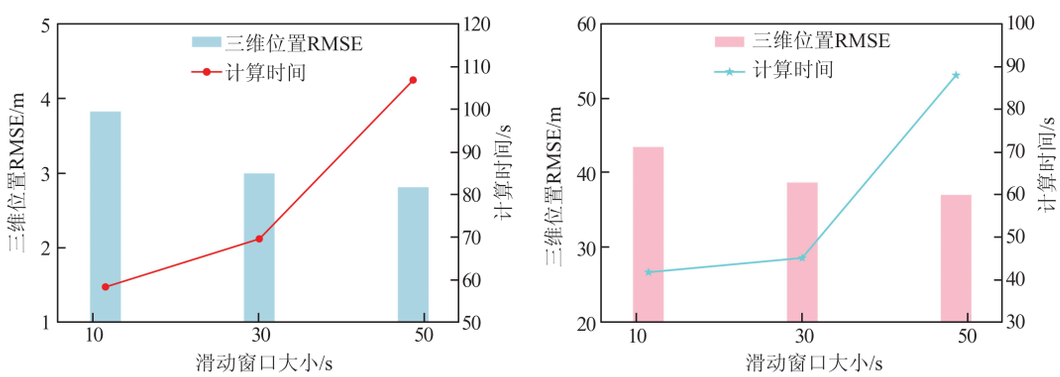
数据集	滑动窗口大小/s	STD/m			RMSE/m		
		北	东	天	北	东	天
campus-01	10	2.13	1.99	2.08	2.36	2.02	2.33
	30	1.43	1.32	1.58	1.53	1.42	2.18
	50	1.38	1.40	1.45	1.38	1.40	2.01
campus-night	10	2.60	5.10	2.85	26.15	20.56	28.30
	30	1.44	2.00	1.08	24.10	19.96	26.70
	50	1.43	2.23	1.16	24.17	20.10	26.80

30 s的滑动窗口大小。此外，即使采用了抗差估计，本文算法中不同滑动窗口大小对定位及耗时的影响趋势也与文献[14]基本保持一致，即本文算法不会改变滑动窗口大小对定位及耗时的影响趋势。

4　结　语

本文针对复杂环境中GNSS观测易受多路径效应和非视距信号干扰，导致组合导航定位精度下降的问题，提出了一种动态观测权调整的抗差FGO算法。与传统固定权重的FGO方法难以适应量测噪声协方差动态变化、引入Huber核函数的抗差算法在处理大残差时计算开销大的问题相比，本文算法通过设计动态权函数，根据滑动窗口内的验后残差实时调整GNSS观测权重系数，避免了对残差的非线性变换，从而保持了目标函数的二次形式，兼顾了抗差性能和计算效率。无人机和车辆的自采数据实验以及不同遮挡环境下的开源数据实验验证了本文算法的有效性。在上述多场景实验验证中，相比基于Huber核函数的抗差算法，本文算法在北、东、天3个方向定位误差的精度均有显著提升，其STD平均降低了25%，RMSE指标也表明本文算法在大多数情况下提升了定位精度，在北向上最高取得了29%的提升，同时计算时间缩短了约18%。本文算法在提升导航误差精度的同时，一定程度上提升了计算效率，能够在实际应用中平衡精度与实时性的需求。

此外，本文还分析了滑动窗口大小对本文算法性能的影响。实验结果表明，与其他算法类似，本文算法的定位RMSE会随滑动窗口的增大而下降，但当窗口大小超过30 s时下降幅度减弱。



(a) campus-01数据集　　(b) campus-night数据集

图 10　不同滑动窗口大小下的三维位置RMSE和计算时间对比

Fig. 10　Comparison of Computation Time for Different Sliding Window Sizes

同时,计算时间也随滑动窗口的增大而迅速增加。通过权衡定位精度和计算时间,针对本文算法的最佳滑动窗口大小可设置为30 s。另一方面,对比本文算法推荐的滑动窗口大小和现有文献推荐的滑动窗口大小可以看出,虽然本文算法在FGO的过程中额外增加了动态权函数的调整策略,提高了抗差效果,但是并未改变滑动窗口大小对定位及耗时的影响趋势。

需要指出的是,本文算法中的动态权函数通过基于滑动窗口内的验后残差统计信息来动态调整GNSS观测值的权重。若观测值中的粗差数量过半,会导致滑动窗口内验后残差的均值和标准差无法准确反映出真实的误差分布,动态权函数对粗差的抑制能力下降。如何在大多数观测值为粗差时提高定位结果的可靠性,仍是一个需要深入探讨的问题。

参 考 文 献

[1] 张小红,张元泰,朱锋.城市复杂场景下GNSS定位的因子图优化方法及其抗差性能分析[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(7):1050-1057.
ZHANG Xiaohong, ZHANG Yuantai, ZHU Feng. Factor Graph Optimization for Urban Environment GNSS Positioning and Robust Performance Analysis [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(7): 1050-1057.

[2] XU B, JIA Q Q, HSU L T. Vector Tracking Loop-Based GNSS NLOS Detection and Correction: Algorithm Design and Performance Analysis [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2020, 69(7): 4604-4619.

[3] SUN Y, FU L. Stacking Ensemble Learning for Non-Line-of-Sight Detection of Global Navigation Satellite System [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2022, 71: 3512510.

[4] GUO J W, ZHOU Y L, ZHAO S, et al. A New GNSS Outlier Mitigation Method for GNSS/INS Integrated System[J]. *Measurement Science and Technology*, 2023, 34(10): 105118.

[5] 柳景斌,赵智博,胡宁松,等.室内高精度定位技术总结与展望[J].武汉大学学报(信息科学版),2022,47(7):997-1008.
LIU Jingbin, ZHAO Zhibo, HU Ningsong, et al. Summary and Prospect of Indoor High-Precision Positioning Technology [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(7): 997-1008.

[6] YAN P H, JIANG J G, ZHANG F N, et al. An Improved Adaptive Kalman Filter for a Single Frequency GNSS/MEMS-IMU/Odometer Integrated Navigation Module[J]. *Remote Sensing*, 2021, 13(21): 4317.

[7] SUN W, LIU J Z. RCKF Cooperative Navigation Algorithm for Tightly Coupled Vehicle Ad Hoc Networks Based on Huber M Estimation [J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 139888-139895.

[8] BARFOOT T D. State Estimation for Robotics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2024.

[9] WEN W S, BAI X W, KAN Y C, et al. Tightly Coupled GNSS/INS Integration *via* Factor Graph and Aided by Fish-Eye Camera[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, 68(11): 10651-10662.

[10] INDELMAN V, WILLIAMS S, KAESS M, et al. Information Fusion in Navigation Systems *via* Factor Graph Based Incremental Smoothing[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2013, 61(8): 721-738.

[11] CHEN D, GAO G X. Probabilistic Graphical Fusion of LiDAR, GPS, and 3D Building Maps for Urban UAV Navigation [J]. *NAVIGATION*, 2019, 66(1): 151-168.

[12] WU X W, XIAO B, WU C H, et al. Factor Graph Based Navigation and Positioning for Control System Design: A Review[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022, 35(5): 25-39.

[13] 崔晓珍,周琪,武东杰,等.GNSS/IMU与里程计紧-松耦合的因子图融合定位方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2024,49(10):1911-1921.
CUI Xiaozhen, ZHOU Qi, WU Dongjie, et al. Factor Graph Fusion Localization Method with Tight and Loose Coupling of GNSS/IMU and Odometry [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(10): 1911-1921.

[14] WEN W S, PFEIFER T, BAI X W, et al. Factor Graph Optimization for GNSS/INS Integration: A Comparison with the Extended Kalman Filter [J]. *NAVIGATION*, 2021, 68(2): 315-331.

[15] 黄紫如,柴洪洲,向民志,等.考虑信息滞后的AUV因子图多源信息融合定位算法[J].中国惯性技术学报,2021,29(5):625-631.
HUANG Ziru, CHAI Hongzhou, XIANG Minzhi, et al. Multi-source Information Fusion Localization Algorithm Based on AUV Factor Graph Considering Information Delay [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2021, 29(5): 625-631.

[16] 唐卫明,戚克培,邓辰龙,等.因子图框架下里程

计辅助GNSS/INS组合导航算法[J]. 测绘通报, 2024(3): 63-68.
TANG Weiming, QI Kepei, DENG Chenlong, et al. An Odometer-Aided GNSS/INS Integrated Navigation Algorithm Under the Framework of FGO [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2024(3): 63-68.

[17] 潘献飞, 宁治文, 王茂松, 等. 基于因子图的导航定位技术应用分析与思考[J]. 控制理论与应用, 2023, 40(12): 2130-2141.
PAN Xianfei, NING Zhiwen, WANG Maosong, et al. Analysis and Reflection on the Navigation and Positioning Application Based on Factor Graph[J]. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(12): 2130-2141.

[18] XIONG J, XIONG Z, ZHUANG Y, et al. Fault-Tolerant Cooperative Positioning Based on Hybrid Robust Gaussian Belief Propagation [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, 24(6): 6425-6431.

[19] LI X X, YU H, WANG X B, et al. FGO-GIL: Factor Graph Optimization-Based GNSS RTK/INS/LiDAR Tightly Coupled Integration for Precise and Continuous Navigation [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2023, 23(13): 14534-14548.

[20] KANHERE A V, MINA T, SHETTY A, et al. Factor Graph-Based Spoofing Mitigation Using the Chimera Signal Enhancement[C]// The 35th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS+ 2022), Denver, USA, 2022.

[21] SÜNDERHAUF N, PROTZEL P. Switchable Constraints for Robust Pose Graph SLAM [C]// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Vilamoura-Algarve, Portugal, 2012.

[22] AGARWAL P, TIPALDI G D, SPINELLO L, et al. Robust Map Optimization Using Dynamic Covariance Scaling[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, Karlsruhe, Germany, 2013.

[23] JIN Y L, LIU S Y, YU F, et al. INS/GNSS/UWB/OD Robust Navigation Algorithm Based on Factor Graph[C]//IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), Harbin, China, 2023.

[24] 蒋郡祥. 基于图优化的视觉/惯性/GNSS融合导航方法研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2021.
JIANG Junxiang. Research on Graph Optimization-Based Visual/InertialGNSS Integrated Navigation Method[D]. Wuhan: Wuhan University, 2021.

[25] 陈映秋, 旷俭, 牛小骥, 等. 基于车轮安装惯性测量单元的车载组合导航[J]. 中国惯性技术学报, 2018, 26(6): 799-804.
CHEN Yingqiu, KUANG Jian, NIU Xiaoji, et al. Vehicle Integrated Navigation Based on Wheel Mounted MEMS-IMU[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2018, 26(6): 799-804.

[26] 马晓爽. 基于因子图的AUV惯性基多源融合定位技术研究[D]. 南京: 东南大学, 2022.
MA Xiaoshuang. Research on Multi-source Fusion Positioning Technology with Inertial Base for AUV Based on Factor Graph [D]. Nanjing: Southeast University, 2022.

[27] TANG H L, ZHANG T S, NIU X J, et al. Impact of the Earth Rotation Compensation on MEMS-IMU Preintegration of Factor Graph Optimization [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2022, 22(17): 17194-17204.

[28] WANG J W, CHEN X Y, SHI C F, et al. Robust *M*-Estimation-Based ICKF for GNSS Outlier Mitigation in GNSS/SINS Navigation Applications[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 8505617.

[29] 陈熙源, 周云川, 钟雨露, 等. 基于变分贝叶斯的鲁棒自适应因子图优化组合导航算法[J]. 仪器仪表学报, 2024, 45(1): 120-129.
CHEN Xiyuan, ZHOU Yunchuan, ZHONG Yulu, et al. Robust Adaptive Factor Graph Optimization Integrated Navigation Algorithm Based on Variational Bayesian [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2024, 45(1): 120-129.

[30] 赵前程, 田俊英, 伍济钢. 联合Huber核函数与可切换约束算法改进的视觉惯性SLAM方法[J]. 中国惯性技术学报, 2023, 31(4): 375-380.
ZHAO Qiancheng, TIAN Junying, WU Jigang. An Improved Vision Inertial SLAM Method Combining Huber Kernel Function and Switchable Constraint Algorithm [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2023, 31(4): 375-380.

[31] YANG Y. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(5): 268-274.

[32] GREATGNSS Rsearch, Application and Teaching Group from SGG of Wuhan University. GREAT Dataset: A Vehicle-Mounted Multi-sensor Raw Observation Dataset in Complex Urban Environment [EB/OL]. [2024-11-08]. https://github.com/GREAT-WHU/GREAT-Dataset.git.

[33] TAKASU T. RTKLIB: An Open Source Program Package for GNSS Positioning [EB/OL]. (2019-03-01)[2020-12-29]. https://www.rtklib.com.